Seri bahan kuliah Algeo #8

Determinan
(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Definisi determinan

- Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Determinan matriks A dilambangkan dengan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan matriks 2 x 2

Untuk matriks A berukuran 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka det(A) = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

Determinan matriks 3 x 3

Untuk matriks A berukuran 3 x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

maka det(A) = $(a_{11}a_{22}\, a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) ={ (2)(-2)(7) + (1)(5)(-3) + (3)(4)(-1)} –

{(3)(-2)(-3) + (2)(5)(-1) + (1)(4)(7)

= -28 – 15 – 12 – 18 + 10 - 28 = -91

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

Determinan Matriks Segitiga

1. Matriks segitiga atas (*upper triangular*): semua elemen di bawah diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

2. Matriks segitiga bawah (*lower triangular*): semua elemen *di atas* diagonal utama adalah nol

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

- Secara umum, untuk matriks segitiga A berukuran n x n,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\, a_{33}\ldots\, a_{nn}$$

Contoh 2. Determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah   det(A) = (3)(4)(-2)(1) = -24

Contoh 2. Determinan matriks identitas

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah det(A) = (1)(1)(1)(1) = 1

Aturan Determinan

- Misalkan A adalah matriks n x n. Matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan memanipulasi matriks A. Bagaimana determinan B?

- A —(Kalikan sebuah baris dengan k)→ B , maka det(B) = k det(A)

- A —(Pertukarkan dua baris)→ B , maka det(B) = –det(A)

- A —(Sebuah baris ditambahkan dengan k kali baris yang lain)→ B , maka det(B) = det(A)

Table 1

Relationship	Operation
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	The first row of A is multiplied by k.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	The first and second rows of A are interchanged.
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	A multiple of the second row of A is added to the first row.

Contoh 3: Misalkan A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dan sudah dihitung pada Contoh 1 bahwa

det(A) = (3)(4) – (2)(-1) = 12 + 2 = 14

Misalkan B diperoleh dengan mengalikan baris pertama A dengan 2,

B = $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ maka det(B) = (6)(4) – (4)(-1)

= 24 + 4 = 28 = 2 x det(A)

Misalkan B diperoleh dengan mempertukarkan baris pertama denga baris kedua,

B = $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ maka det(B) = (–1)(2) – (4)(3)

= (–2) – 12 = –14 = –det(A)

Menghitung determinan dengan reduksi baris

- Determinan matriks A dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas)

$$[A] \overset{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

maka $\det(A) = (-1)^p \, a'_{11} a'_{22} \dots a'_{nn}$ *)

p menyatakan banyaknya operasi pertukaran baris di dalam OBE

*) Asumsi tidak ada operasi perkalian baris dengan konstanta *k*

- Jika selama reduksi baris ada OBE berupa perkalian baris-baris matriks dengan k_1, k_2, …, k_m, maka

$$\text{maka } \det(A) = \frac{(-1)^p \, a'_{11} \; a'_{22} \ldots a'_{mm}}{k_1 k_2 \ldots k_m}$$

Contoh 4: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan reduksi baris menggunakan OBE sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R3 - 2/3(R1)}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \overset{R3 - 10R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}$$

matriks segitiga atas

Ada satu operasi pertukaran baris, maka $p = 1$

sehingga det(A) = $(-1)^1(3)(1)(-55) = 165$

Contoh 5: Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R1 \leftrightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2 + R1 \\ \sim \\ R3 - 3R1 \\ R4 + R1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R3 + R2 \\ \sim \\ R4 - 1/3(R2) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R4 + 1/6(R3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

Ada satu operasi pertukaran baris, maka p = 1

sehingga det(A) = $(-1)^1(1)(3)(6)\left(\frac{7}{6}\right) = -21$

Jika misalnya baris 1 terlebih dahulu dibagi dengan 3 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R3-R1 \\ R4+R1}}{\overset{R2+R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R3 - R2/2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R4 + R3/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 \end{bmatrix}$$

Tidak ada operasi pertukaran baris, maka p = 0

Ada perkalian baris 1 dengan 1/3

sehingga det(A) = $\dfrac{(-1)^0(1)(2)(-3)(\frac{7}{6})}{1/3} = \dfrac{-7}{1/3} = -21$

Teorema tentang determinan

1. Jika A mengandung sebuah baris nol atau kolom nol, maka det(A) = 0

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = 0$$

2. Jika A^T adalah matriks transpose dari A, maka $\det(A^T) = \det(A)$

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = -91$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

det(A) = (2)(-2)(7) + (4)(-1)(3) + (-3)(1)(5)
 - (-3)(-2)(3) – (2)(-1)(5) – (4)(1)(7)
= -28 – 12 – 15 – 18 + 10 – 28 = –9 1

3. Jika $A = BC$ maka $\det(A) = \det(B)\det(C)$

4. Sebuah matriks hanya mempunyai balikan jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

5. $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A)$

Bukti: $AA^{-1} = I$

$\det(AA^{-1}) = \det(I)$

$\det(A)\det(A^{-1}) = 1$

$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

THEOREM 2.3.8 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

(a) A is invertible.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.

(c) The reduced row echelon form of A is I_n.

(d) A can be expressed as a product of elementary matrices.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix b.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix b.

(g) $\det(A) \neq 0$.

Latihan

Tentukan determinan matriks2 berikut dengan OBE:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$